1.1.

1.2.

1.3. Begriffsdefinition

STATIK - „Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte“

Körper — fest — starr
- fest
  - starr
  - elastisch
  - plastisch
- flüssig
- gasförmig

Kraft – physikalische Größe, die nur an ihren Wirkungen nachweisbar ist

Einheit – Quantifizierung (Maßzahl + Einheit)
nach SI-System
Basiseinheiten: Länge in m, Masse in kg, Zeit in s
abgeleitete Größen: $\frac{m}{s}; \frac{m}{s^2}; N$ .....

2. Ausgewählte Kapitel der „Statik starrer Körper“

2.1. Kraftbegriff und Grundgesetze der Statik

2.1.1. Die Kraft

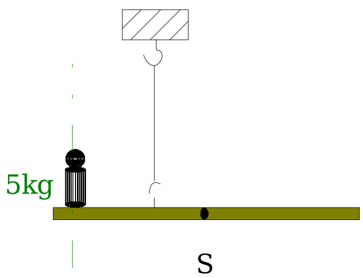
Physikalische Größe, die mit einer Gewichtskraft ins Gleichgewicht gesetzt werden kann!

Gewichtskraft: $F_G = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot G$ Newtonsches Gravitationsgesetz

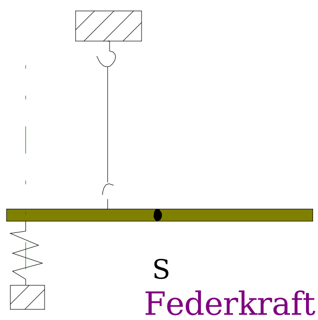
$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$F_G = m_1 \cdot g \quad [\frac{kg \cdot m}{s^2}] = [N]$

Benennung von Kräften – Beispiel: aufgehängten Balken in horizontaler Lage halten



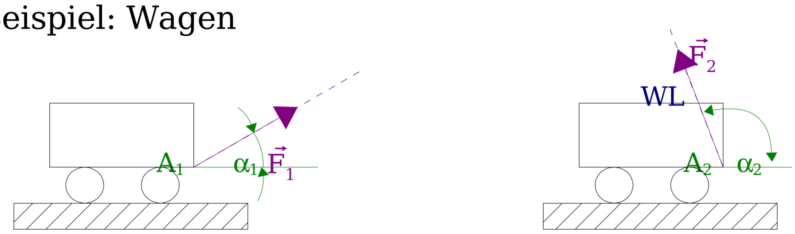
Gewichtskraft



Federkraft

Angriffspunkt und Richtung

Beispiel: Wagen

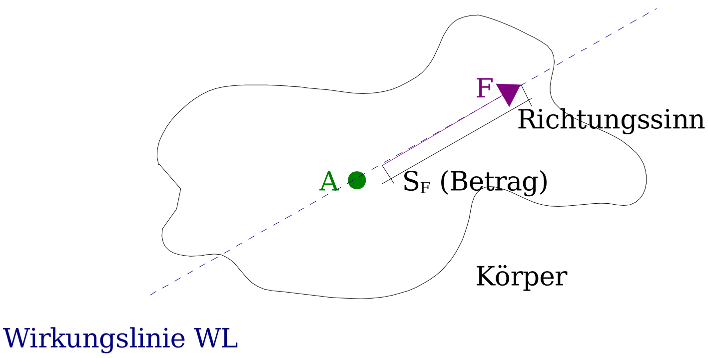


$$A_1 = A_2$$
$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$
$$\alpha_1 \neq \alpha 2$$
$$\text{aber}: \vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$$

Die Kraft ist eine gerichtete Größe (Vektor) und wird ausreichend bestimmt durch:

- Betrag (skalarer Wert und physikalische Einheit)
- Richtung (Wirkungslinie)
- Richtungssinn (Pfeilspitze)
- Lage des Angriffspunktes

Zeichnerische Darstellung:



S_F – Strecke des Kraftvektors

<u>Einheit der Kraft</u> Newton [N] $\quad 1\,N = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s^2}$

<u>Kraftmaßstab</u> $m_F[\frac{N}{cm}]$ Beispiel: $m_F=300\frac{N}{cm}$

$s_F=2\,cm\,|\vec{F}|=m_F\cdot s_F=300\frac{N}{cm}\cdot 2\,cm=600\,N$

<u>Kraftvektoren</u> $\vec{F},\vec{F}_G,\vec{F}_1,\vec{F}_A\ldots$ Vektoren

$|\vec{F}|=F$ Betrag

2.1.2. Grundgesetze (Axiome) der Statik starrer Körper

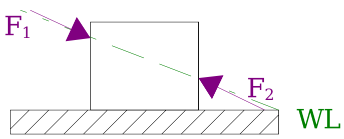
2.1.2.1. Trägheitsaxiom

Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn die Summe der einwirkenden Kräfte gleich Null ist!

⇒ Gleichgewicht

<u>Sonderfall:</u> zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie

- die gleiche Wirkungslinie haben
- entgegengesetzt gerichtet sind
- den gleichen Betrag aufweisen

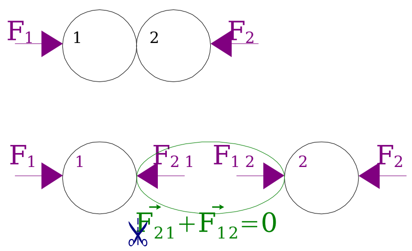


$$|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|$$
$$\vec{F}_1=-\vec{F}_2$$
$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$$

2.1.2.2. Reaktionsaxiom

Wird von einem Körper auf einen zweiten eine Kraft ausgeübt (actio), so reagiert dieser mit einer gleich großen, auf gleicher WL liegenden, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft (reactio).

Beispiel:
Kontaktkräfte

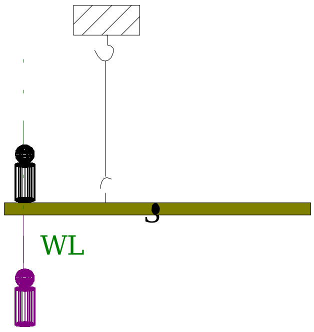


treten immer paarweise auf

2.1.2.3. Verschiebungsaxiom

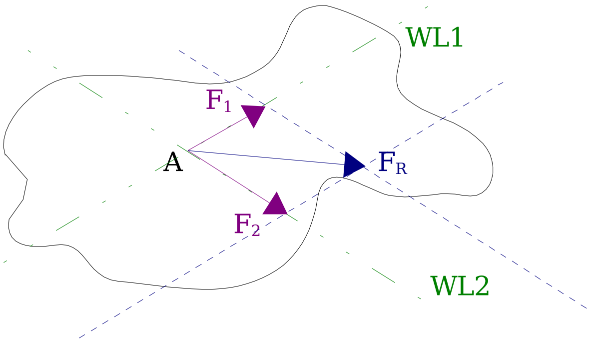
Die Wirkung einer Kraft auf einen starren Körper bleibt unverändert, wenn man sie entlang der WL verschiebt (→ linienflüchtiger Vektor)

Beispiel:



2.1.2.4. Parallelogrammaxiom

Die Wirkung zweier Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die an einem gemeinsamen Punkt angreifen, ist gleich der Kraft $\vec{F}_R$, die sich als Diagonale eines mit den Leitern $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gebildeten Parallelogramms ergibt!

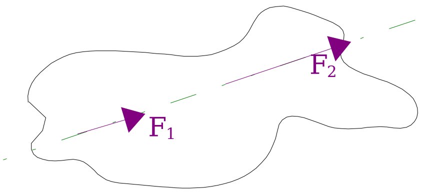


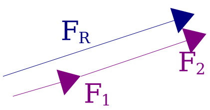
→ vektorielle Addition

$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}_R$

<u>Sonderfälle</u>

a) Kräfte haben gemeinsame WL und Richtung

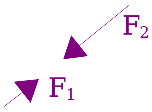


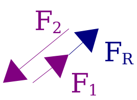


$\vec{F}_R=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

$F_R=F_1+F_2$

b) gleiche WL, entgegengesetzt

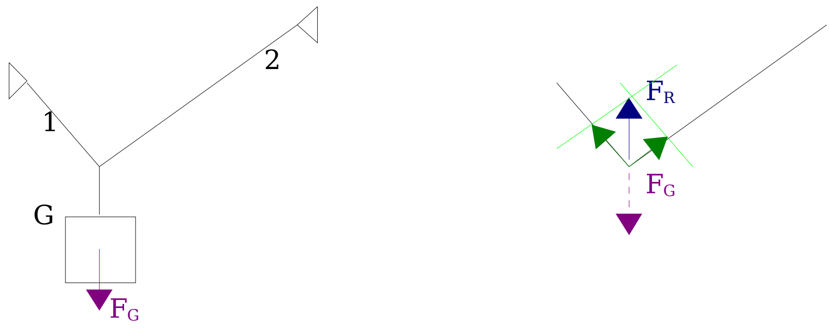




$\vec{F}_R=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

$F_R=F_2-F_1$

c) Zerlegung einer Kraft

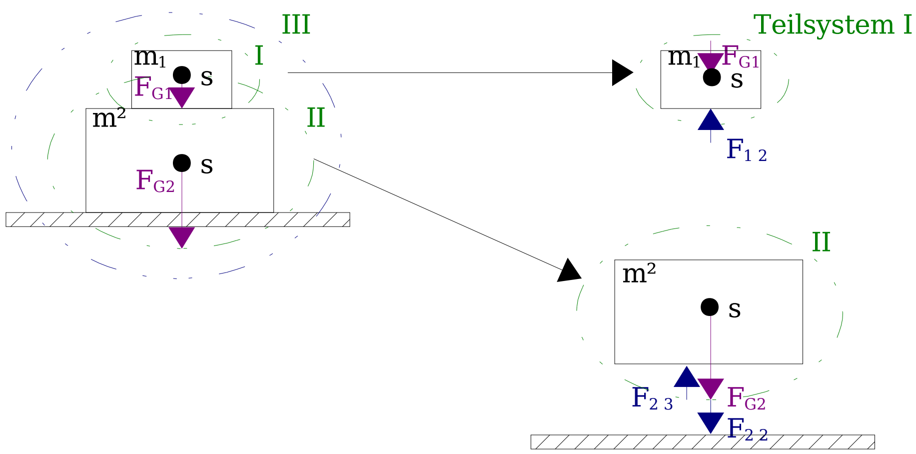


2.1.3. Das Gleichgewicht

2.1.3.1. Schnittprinzip

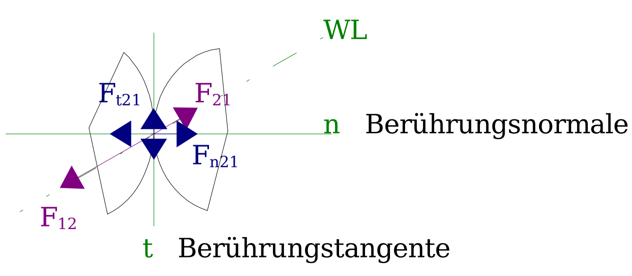
Kräfte zwischen Körpern können durch einen (gedanklichen) Schnitt in der Berührungsstelle sichtbar gemacht werden. An den Schnittufern entstehen Schnittkräfte (actio = reactio)

Beispiel:



2.1.3.2. Kräfteübertragung

Reine Berührung



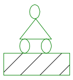
Allgemein: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Kraftzerlegung in 2 Richtungen

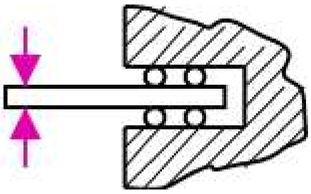
$\vec{F}_{n12} = -\vec{F}_{n21} ; \vec{F}_{t12} = -\vec{F}_{t21}$

Tangentialkräfte $\vec{F}_{t12}, \vec{F}_{t21}$ entsprechen Reibungskräften.

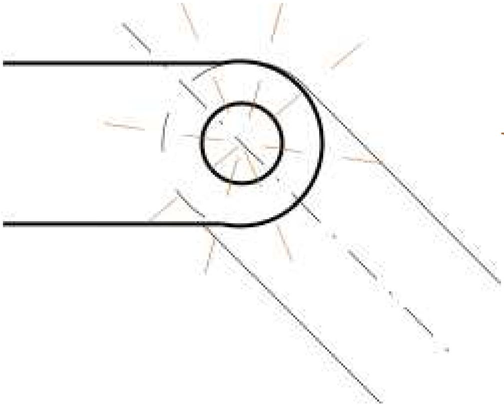
Meist gilt: $F_n >> F_t$, damit ist F_t zu vernachlässigen, Übertragung durch „reine Berührung“ → Wirkungslinie geht senkrecht zur Berührungsfläche durch den Berührungspunkt.

 oder 

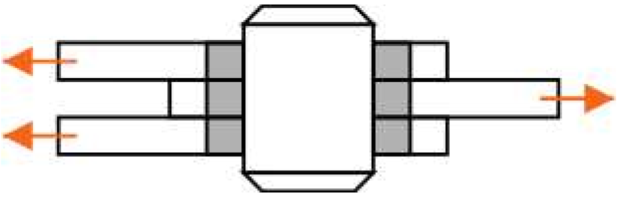
(Auflagen)



Gelenkverbindung

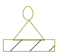


WL unbekannt

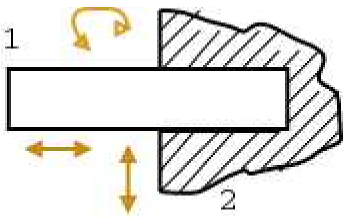


Die Kräfe sind in jeder Richtung übertragbar, WL unbekannt!

Symbolische Darstellung:

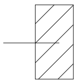
 oder 

Feste Einspannung

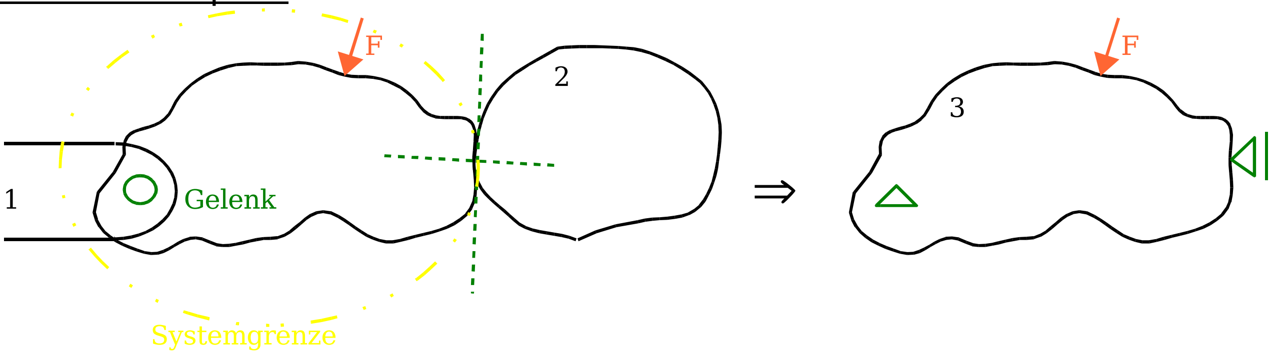


Körper 1 und 2 fest miteinander verbunden.

Symbolische Darstellung



2.1.3.3. Auflagereaktionen → Kräfte an den Berührungsstellen mit anderen Körpern

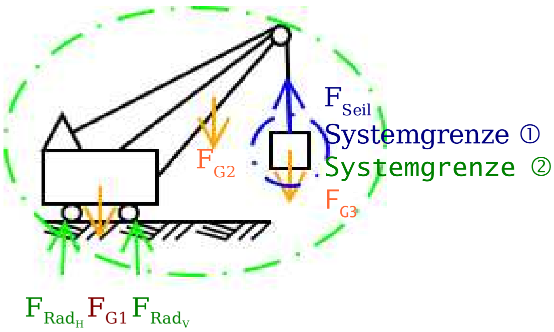


Systemgrenze – gedachte Begrenzung von interessierenden Körpern

Äußere Kräfte – wirken von außen auf den Körper ein (über die Systemgrenze)
Beispiel: Auflager- und Gewichtskraft

Innere Kräfte – wirken zwischen einzelnen Teilen des betrachteten mechanischen Systems, treten stets paarweise auf!

Beispiel: Kran



2.1.3.4. Vorgehen beim Lösen von Gleichgewichtsaufgaben

I. ABGRENZEN – Systemgrenzen festlegen

II. Freimachen (Schneiden) ✂

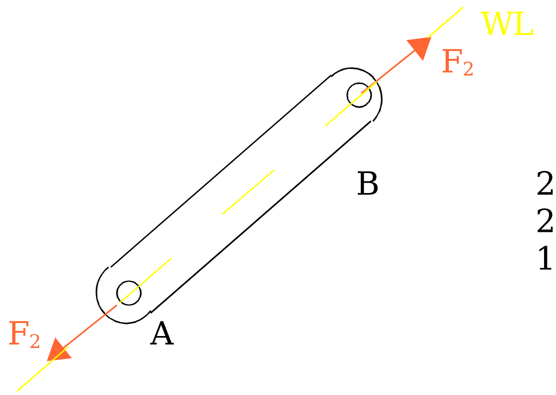
- ➔ äußere Kräfte angeben (Angriffspunkt, WL, Betrag, Gewichts- / Auflagerkräfte berücksichtigen)
- ➔ Schnittmethode: innere Kräfte werden zu äußeren gemacht
- ➔ Erstarrungsmethode: mehrere Körper werden als gemeinsamer starrer Körper aufgefaßt!

III. Lösen des Gleichgewichtsproblems mit Hilfe des Trägheitsaxioms

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

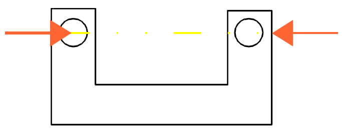
2.1.3.5. Beispiele

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$



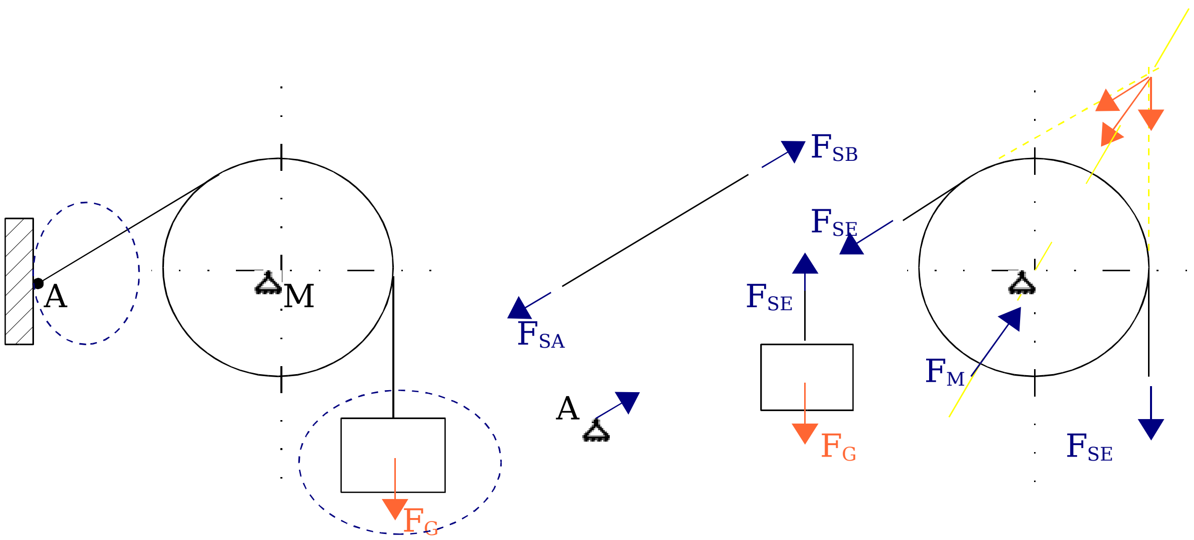
2 Kraftangriffspunkte
2 Kräfte
1 gemeinsame WL

Symbol:



Wichtig: mit dem Erkennen von Pendelstücken erkennt man die WL von Kräften!

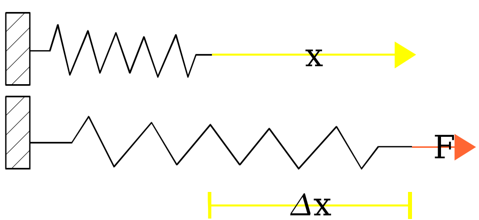
<u>Seil – Seilrolle</u>



$|\vec{F}_G| = |\vec{F}_{Seil}|$ Mit Hilfe einer Seilrolle läßt sich eine Kraft umlenken, Betrag bleibt konstant.

<u>Feder</u> Federkonstante C in $[\frac{N}{cm}]$

$|\vec{F}_{Feder}| = c \cdot \Delta x$



2.2. Kräftesysteme

2.2.1. Ebenes, zentrales Kräftesystem (KS)

Ebenes KS → WL aller Kräfte in einer Ebene

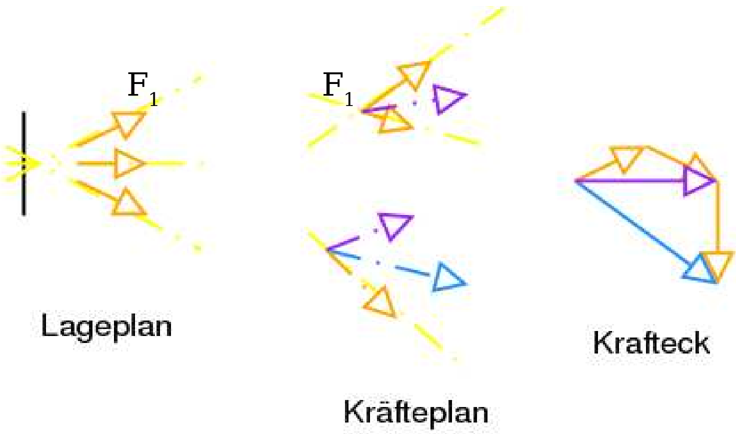
Zentrales KS → alle WL scheiden sich in einem Punkt

2.2.1.1. Ermittlung der Resultierenden

Definition: Zusammenfassung vieler Einzelkräfte zu einer Gesamtkraft

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Beispiel:



Lageplan – Körper mit Kräften in richtiger Zuordnung (oft nicht maßstabsgetreu)

Kräfteplan – Parallelogrammkonstruktion, maßstäblich

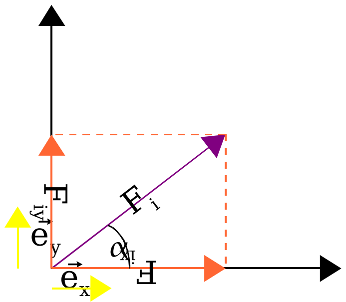
Krafteck – vereinfacht auf Hälfte Parallelogramm

Die Resultierende ergibt sich unabhängig von der Reihenfolge.

Vorgehensweise

- Einführung eines zweckmäßigen KOS

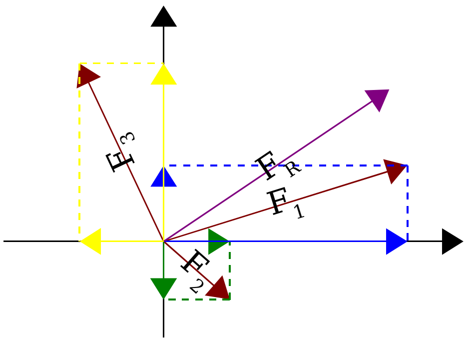
- Zerlegung aller Kräfte in x- und y-Komponenten
  $\vec{F}_i = \vec{F}_{ix} + \vec{F}_{iy}$



$$F_{ix} = F_i \cdot \cos\alpha \quad F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}$$
$$F_{iy} = F_i \cdot \sin\alpha \quad \alpha = \arctan\frac{T_{iy}}{T_{ix}}$$

  Darstellung als Zeilen- oder Spaltenvektor:
  $\vec{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}); \vec{F}_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix}$

- Berechnung der Resultierenden (Komponentenweise
  $\vec{F}_{Rx} = \sum \vec{F}_{ix} = \vec{F}_1 x + \vec{F}_2 x + \ldots = \vec{e}_x \cdot (F_1 x + F_2 x + \ldots)$
  $\vec{F}_{Ry} = \sum \vec{F}_{iy} = \vec{F}_1 y + \vec{F}_2 y + \ldots = \vec{e}_y \cdot (F_1 y + F_2 y + \ldots)$
  <u>Beispiel:</u>



I	F_i	α_i	cos α_i	sin α_i	F_{ix}	F_{iy}
					⋮	⋮
				Σ	F_{Rx}	F_{Ry}

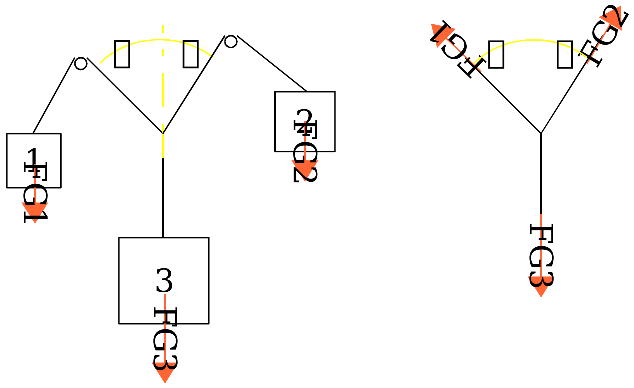
2.2.1.2. Untersuchung des Gleichgewichts

<u>Allgemein</u>: Gleichgewicht, wenn sich die Wirkungen aller Kräfte aufheben.

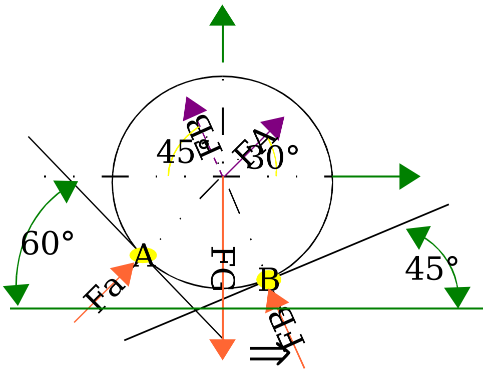
<u>Zentrales ebenes KS</u>: Die Resultierende wird zu Null $\quad \vec{F}_R = \vec{0}$

d.h. die Summe der x-Komponenten $\quad \vec{F}_{Rx} = \sum \vec{F}_{ix} = \vec{0}$
und die Summe der y-Komponenten $\quad \vec{F}_{Ry} = \sum \vec{F}_{iy} = \vec{0}$
wird jeweils zu Null

Beispiel:



Beispiel:



$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} F_a \cdot \cos 30° \\ F_a \cdot \sin 30° \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -F_B \cdot \cos 45° \\ +F_B \cdot \sin 45° \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -900\,N \end{pmatrix}$$

Gleichgewichtsbedingung

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G = 0$$

d.h. $\sum F_{ix} = 0 = 0{,}866 \cdot F_A - 0{,}707\,F_B$ 1

$\sum F_{iy} = 0 = 0{,}5 \cdot F_A + 0{,}707\,F_B - 900\,N$ 2

1 umgeformt $\quad 0{,}866\,F_A = 0{,}707\,F_B$

eingesetzt in 2 $\quad 0 = 0{,}5 \cdot F_A + 0{,}866\,F_A - 900\,N$

$F_A = \ldots = 649\,N$

$F_B = \ldots = 807\,N$

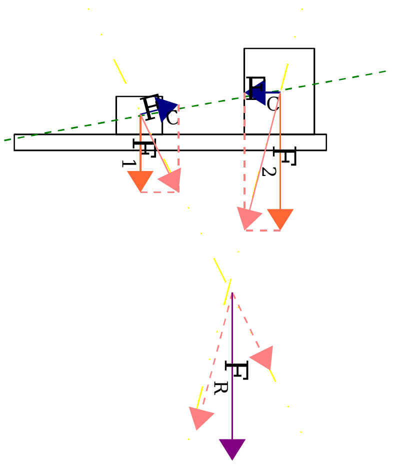
2.2.2. Allgemeines, ebenes KS

WL aller Kräfte liegen in einer Ebene, schneiden sich nicht in einem Punkt.

Vorgehensweise: Ermittlung der Resultierenden durch stückweises Zusammenfassen von jeweils 2 Kräften → Problem bei parallelen Kräften.

2.2.2.1. Kräftepaar und Moment

Parallele Kräfte Fall A WL parallel, Kräfte nicht gleich groß!



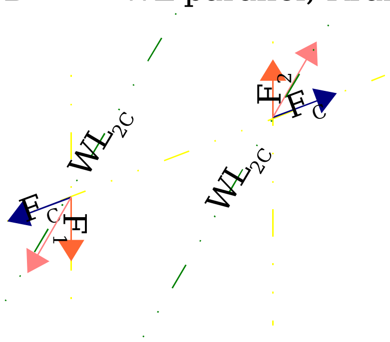
Lösungsweg:

Hinzufügen von zwei Hilfskräften F_C, die entgegengesetzt gleich groß sind und auf derselben WL liegen!

Ergebnis:

Parallele Kräfte ergeben eine Kraft als Resultierende!

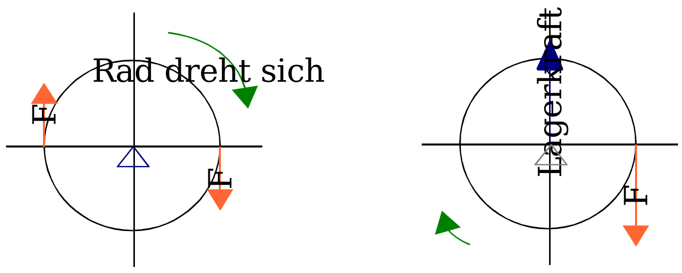
Fall B WL parallel, Kräfte entgegengesetzt gleich groß



kein Schnittpunkt von WL_{1C} und WL_{2C} damit keine resultierende Kraft!
→ Kräftepaar

Zwei parallele Kräfte gleichen Betrages und entgegengesetzter Richtung stellen ein Kräftepaar dar! Ein Kräftepaar ist ein Grundelement, versucht den Körper zu drehen!

Beispiel Lenkrad:

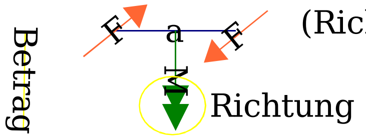


„einhändig“

Kräftepaar ist ein Vektor mit

„Moment“ $M = F \cdot a$ (Betrag)

(Richtung)



<u>Statisches Moment einer Kraft</u>

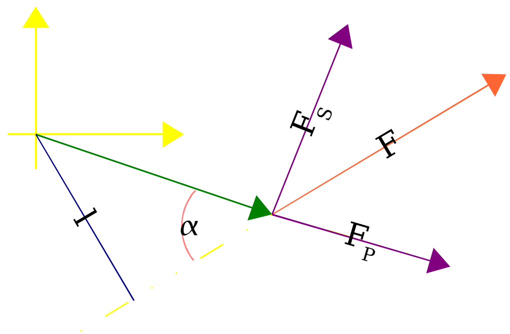
Neben Kräftepaaren kann auch eine Einzelkraft ein Moment bezüglich eines Punktes (Drehpunkt) ausüben!

<u>Definition:</u> Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes A

$\text{Moment}_{[A]} = \text{Kraft x Hebelarm}$

Hebelarm ist die kürzeste Verbindung Bezugspunkt und WL der Kraft!

$|\vec{M}| = l \cdot |\vec{F}|$ $M = l \cdot F = \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{l} \cdot F$



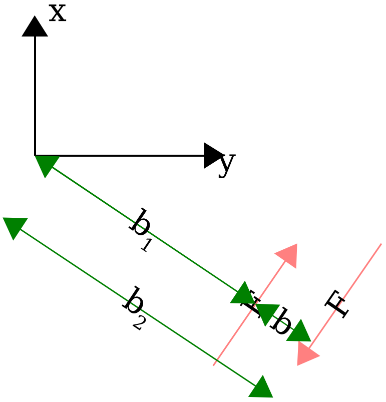
<u>Allgemein:</u> $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$|\vec{M}| = r \cdot F \cdot \sin\alpha$

Ebene: $\vec{M} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + M_Z\vec{e}_Z$

<u>Eigenschaften eines statischen Moments</u>

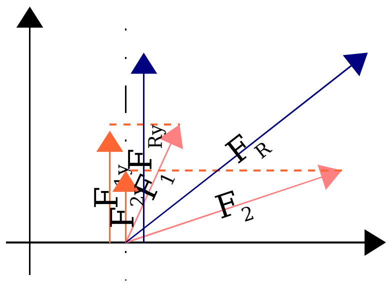
- statisches Moment eines Kräftepaares ist unabhängig vom Bezugspunkt.



$$M_1 = +F \cdot l_1$$
$$M_2 = -F \cdot l_2$$
$$M_R = M_1 + M_2 = F(l_2 - l_1) = F \cdot b$$

- Summe der statischen Momente ist gleich dem statischen Moment der Resultierenden des Kräftesystems.

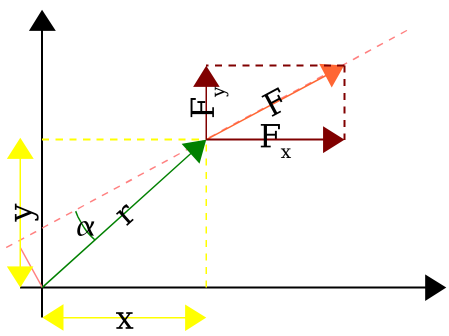
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots$$



Kräftezerlegung F_{1x}; F_{1y}
F_{2x}; F_{2y}

Stat. Momente $M_1 = x \cdot F_{1y}; M_2 = x \cdot F_{2y}$
$M_{R(0)} = x \cdot F_{1y} + x \cdot F_{2y} = x(F_{1y} + F_{2y})$

- statisches Moment einer beliebigen Kraft



$$M = -F_x \cdot y + F_y \cdot x$$
oder
$$M = F \cdot \sin\alpha \cdot r$$

2.2.2.2. Reduktion

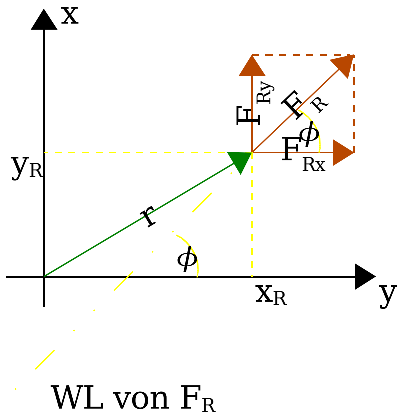
Bildung der Resultierenden und / oder verbleibendes Kräftepaar

$$F_{Rx}=\sum_{i=1}^{n} F_{ix}; F_{Ry}=\sum_{i=1}^{n} F_{iy}; F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}$$

$$\phi=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}; F_{Rx}=F_R\cdot\cos\phi; F_{Ry}=F_R\cdot\sin\phi$$

Betrag und Richtungssinn

Wirkungslinie von F_R



Momentensatz

$$M_{R[0]}=F_{Ry}\cdot x_R-F_{Rx}\cdot y_R$$

Geradengleichung

$$y=\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\cdot x-\frac{M_{R[0]}}{F_{Rx}}$$

Achsenabschnitt

Steigung

Momentensatz

$$\sum_{i=1}^{n} M_i=\sum_{i=1}^{n}(F_{iy}\cdot x_i-F_{ix}\cdot y_1)=M_R$$

Fallunterscheidung

Fall	F_{Rx}, F_{Ry}	M_R	Bemerkung
1	$\neq 0$	0	Resultierende durch Ursprung
	$\neq 0$	0	Resultierende beliebig
2	0	$\neq 0$	Kräftepaar mit M_R
3	0	0	Körper im Gleichgewicht

2.2.2.3. Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingung (ebenes KS)

- algebraische Summer der x-Komponenten aller $F_{ix}=0$
- algebraische Summer der y-Komponenten aller $F_{iy}=0$

– algebraische Summe der statischen Momente

aller Kräfte bezüglich eines <u>beliebig gewählten Bezugspunktes A</u> ist gleich Null.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0;\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0;\sum_{i=1}^{n} M_{i[A]}=0$$

mit $(x_A, y_A) = A$ folgt: $\sum_{i=1}^{n} M_{i[A]}=\sum_{i=1}^{n}[F_{iy}\cdot(x_i-x_A)-F_{ix}(y_i-y_A)]=0$

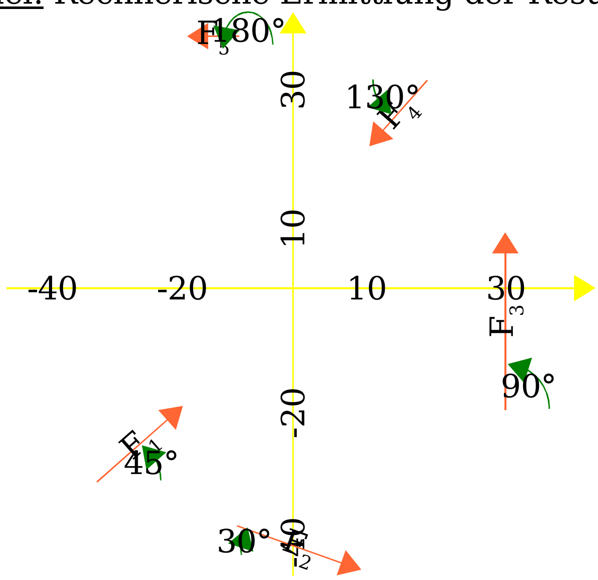
<u>Überlagerungssatz</u> → Superposition

In der Statik starrer Körper überlagern sich die Reaktionen der Teilbelastungen additiv!

<u>Hinweise</u>

- KOS beliebig
- Bezugspunkt A für Momentengleichgewicht beliebig
- max. 3 Unbekannte
- positive Momentenrichtung ist beliebig
- verteilte Lasten (Linien-, Flächenlast) reduzieren
- Momente haben keinen Einfluß auf Kräftegleichgewicht

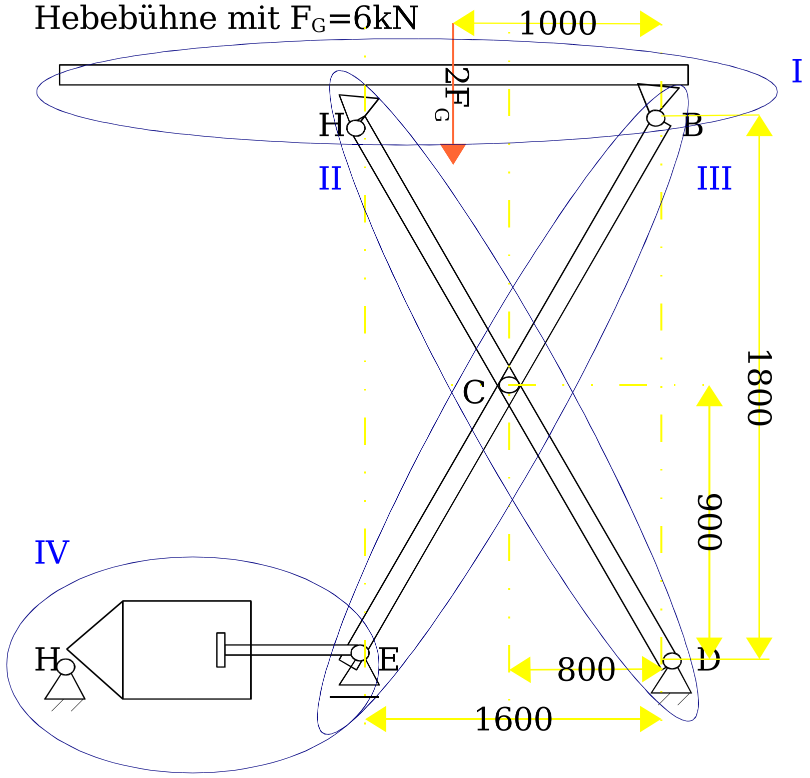
<u>Beispiel:</u> Rechnerische Ermittlung der Resultierenden

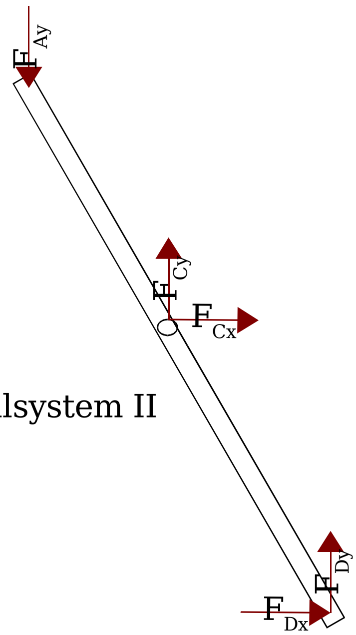


$F_1 = 40N$ $\alpha_1=45°$
$F_2 = 40N$ $\alpha_2=330°$
$F_3 = 40N$ $\alpha_3=90°$
$F_4 = 40N$ $\alpha_4=210°$
$F_5 = 40N$ $\alpha_5=180°$

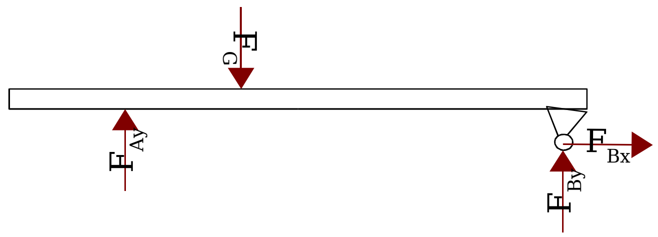
Nr	F_i[N]	ϕ_i [°]	Cos ϕ_i	Sin ϕ_i	F_{ix}	F_{iy}	x_i	y_i	F_{iy} x_i	F_{ix} y_i
1	40	45	0,707	0,707	28,28	28,28	-20	-20	565,6	565,6
2										
3										
4										
5										
					F_{Rx}	F_{Ry}			$\sum F_{iy} \cdot x_i$	$\sum F_{ix} \cdot y_i$

Beispiel: Bestimmung der Gelenk- und Auflagekräfte an einer hydraulischen Hebebühne mit F_G=6kN

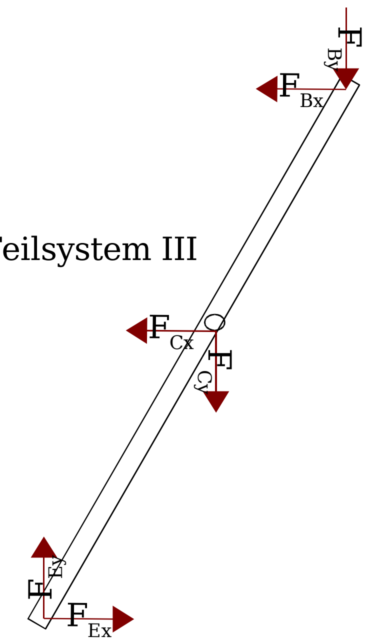




Teilsystem II



Teilsystem I



Teilsystem III

③ Lösen der Gleichgewichtsbedingungen am Teilsystem I

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{Bx} \qquad [1]$$
$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ay} + F_{By} - F_G \qquad [2]$$
$$\sum M_{i[B]} = 0 = F_G \cdot 1\,\mathrm{m} - F_A \cdot 1{,}6\,\mathrm{m} \qquad [3]$$

Daraus folgt $F_{Bx} = 0$

$$F_{Ay} = \frac{F_G \cdot 1\,\mathrm{m}}{1{,}6\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{3{,}75\,\mathrm{kN}}}; F_{By} = 6\,\mathrm{kN} - 3{,}75 = \underline{\underline{2{,}25\,\mathrm{kN}}}$$

Gleichgewicht für Teilsystem II

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{Cx} + F_{Dx} \qquad [4]$$
$$\sum F_{iy} = 0 = -F_{Ay} + F_{Cy} + F_{Dy} \qquad [5]$$
$$\sum M_{i[D]} = 0 = F_{Ay} \cdot 1{,}6\,\mathrm{m} - F_{Cy} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} - F_{Cx} \cdot 0{,}9\,\mathrm{m} \qquad [6]$$

Gleichgewicht für Teilsystem III

$$\sum F_{ix} = 0 = -F_{Bx} - F_{Cx} + F_{Ex} \qquad [7]$$
$$\sum F_{iy} = 0 = -F_{By} - F_{Cy} + F_{Ey} \qquad [8]$$
$$\sum F_{i[E]} = 0 = F_{Cx} \cdot 0{,}9\,\mathrm{m} - F_{Cy} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} - F_{By} \cdot 1{,}6\,\mathrm{m} \qquad [9]$$

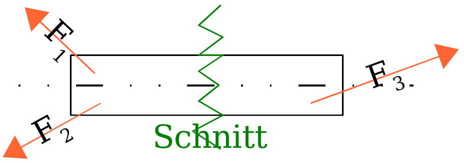
$$F_C = \begin{pmatrix} 5{,}33\,\mathrm{kN} \\ 1{,}5\,\mathrm{kN} \end{pmatrix}$$
$$F_D = \begin{pmatrix} -5{,}33\,\mathrm{kN} \\ 2{,}25\,\mathrm{kN} \end{pmatrix}$$
$$F_E = \begin{pmatrix} 5{,}33\,\mathrm{kN} \\ 3{,}75\,\mathrm{kN} \end{pmatrix}$$

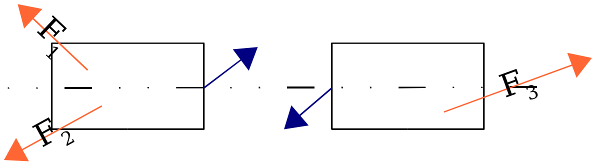
2.2.3. Einführung „Räumliches Kräftesystem“

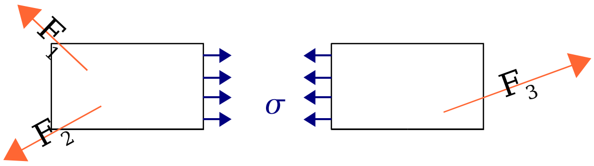
Zeichnungen siehe Folien

2.3. Innere Kräfte und Momente (Schnittgrößen)

Beanspruchungsgrößen im Bauteil sind erforderlich zur Dimensionierung





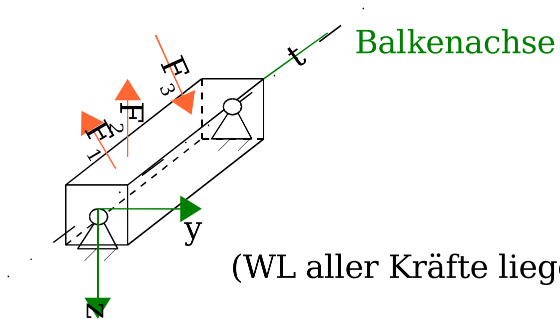


„Schnittkraft“ „Spannung“ $\sigma = \frac{F}{A}$

STATIK Festigkeitslehre

Schnittgrößen → innere Kräfte und Momente

2.3.1. Balken

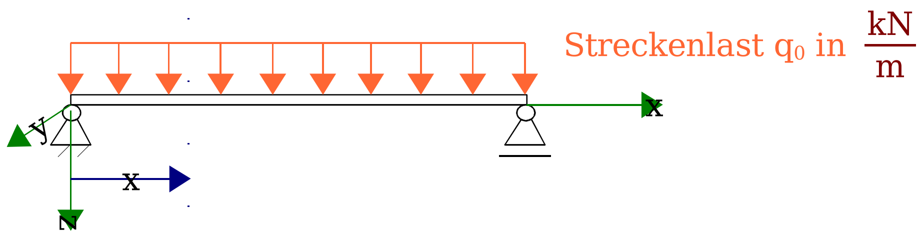


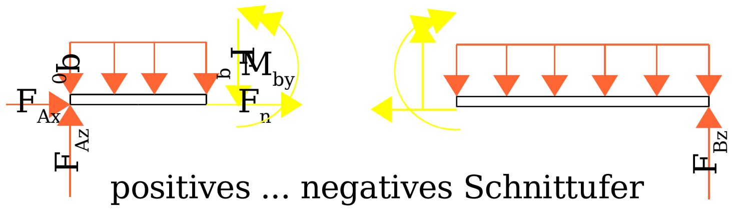
(WL aller Kräfte liegen in x,z-Ebene)

Wichtiges Bauelement in der Technik

- Hauptausdehnung in einer Richtung
- Beschreibung durch Balkenachse
- Materialanordnung um Achse
- Balkenachse verbindet die Schwerpunkte der Querschnittsflächen
- L > 10B, L > 10H
- biegesteif

2.3.2. Vorgehensweise zur Bestimmung der Schnittgrößen





Schnittgrößen an Stelle x:

- Normalkraft F_n (x)
- Querkraft F_q (x)
- Biegemoment M_{by} (x)

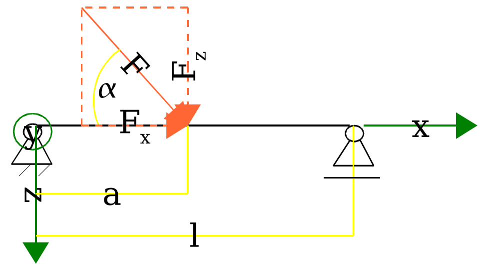
<u>Vorgehensweise</u>

- Auflagerkräfte bestimmen
- Balken an Stelle x schneiden, Schnittgrößen F_n, F_q und M_{by} antragen
- Gleichgewicht am freigeschnittenen Teilsystem
  $\sum F_{ix} + F_n = 0; \sum F_{iz} + F_q = 0; \sum M_{i[Schere]} + M_{by} = 0$

Beachte:

- F_n, F_q und M_{by} sind Funktionen von x
- Unstetigkeiten sind Kraft-, Momenten- oder Geometrieänderungen → bereichsweise Betrachtung

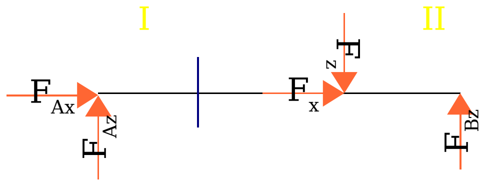
<u>Beispiel</u>: Balken mit Einzellast



Gegeben: F, α, a, l

$F_x = F \cdot \cos\alpha$

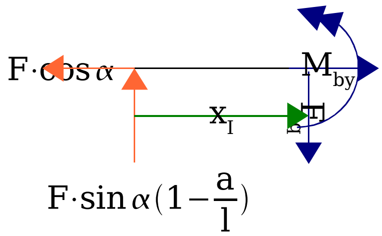
$F_z = F \cdot \sin\alpha$



① Auflagerkräfte

$$\sum F_{ix}=0=F_{Ax}+F_x \rightarrow F_{Ax}=-F_x$$
$$\sum F_{iz}=0=F_z-F_{Az}-F_{Bz} \rightarrow F_{Az}=F_z-F_{Bz}$$
$$\sum M_{i[A]}=0=-F_z\cdot a+F_{Bz}\cdot l \rightarrow F_{Bz}=F_z\cdot\frac{a}{l}$$

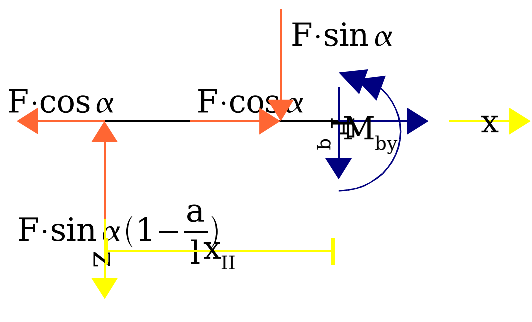
② Schnittgrößen als f(x): → Bereichswechsel beachten
Bereich I: $0\leq x<a$



③ a Kräftegleichgewicht:

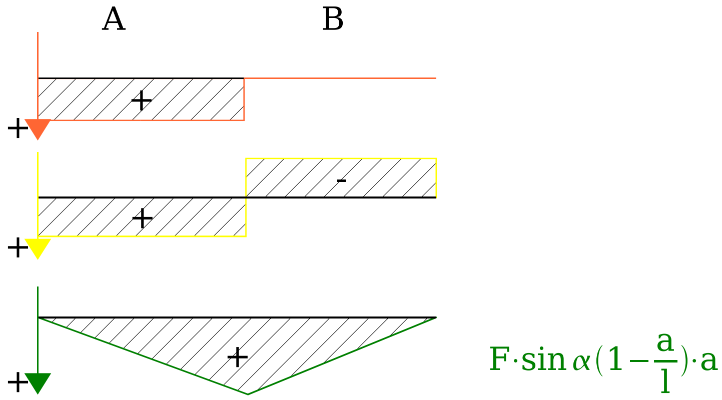
$$\sum F_{ix}=-F\cos\alpha+F_n=0 \rightarrow F_n=F\cdot\cos\alpha$$
$$\sum F_{iz}=-F\cdot\sin\alpha(1-\frac{a}{l})+F_q=0 \rightarrow F_q=F\sin\alpha(1-\frac{a}{l})$$
$$\sum M_{i[✂]}=-F\cdot\sin\alpha(1-\frac{a}{l})\cdot x_I+M_{by}=0 \rightarrow M_{by}=F\cdot\sin\alpha(1-\frac{a}{l})\cdot x_I$$

Bereich II: $a\leq x_{II}\leq l$



$$\sum F_{ix}=0=-F\cdot\cos\alpha+F\cdot\cos\alpha+F_n \rightarrow F_n=0$$
$$\sum F_{iz}=0=F\cdot\sin alhpa-F\cdot\sin\alpha(1-\frac{a}{l})+F_q \rightarrow F_q=-F\cdot\sin\alpha(\frac{a}{l})$$
$$\sum M_{i[✂]}=0=-F\cdot\sin\alpha(1-\frac{a}{l})\cdot x_{II}+F\cdot\sin alhpa\cdot(x_{II}-a)+M_{by} \rightarrow M_{by}=F\cdot\sin\alpha(a-\frac{x_{II}\cdot a}{l})$$

④ Verlauf der Schnittgrößen

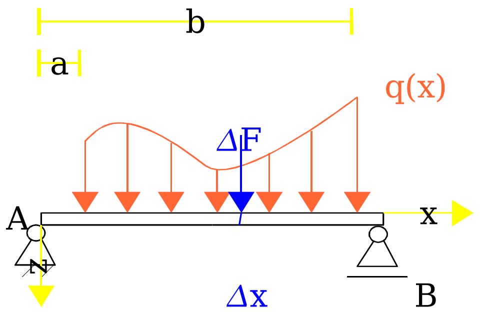


2.3.3. Streckenlast

Bisher Betrachtung von Punktlast → Einzelkraft F
Viele Belastungen greifen verteilt an einem Körper an (Eigengewicht, Schneelast, ...)
Unterscheidung in: Einheit

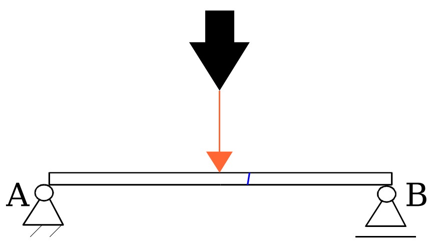
- Linien-/Streckenlast q(x) $[\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}]$
- Flächenlast p(x,y) $[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}]$
- Volumenlast

Definition:



$\frac{\Delta F}{\Delta x}$ durchschn. Belastungsintensität

Reduktion auf



$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx} = q(x)$ Belastungsintensität an Stelle x

Resultierende F einer Streckenlast:

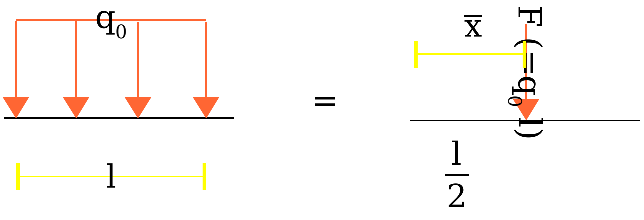
$$F = \int_{x=a}^{b} q(x)\,dx$$

Angriffspunkt

$$\bar{x} = \frac{1}{F} \int_{x=a}^{b} q(x) \cdot x \, dx$$

Beispiele:

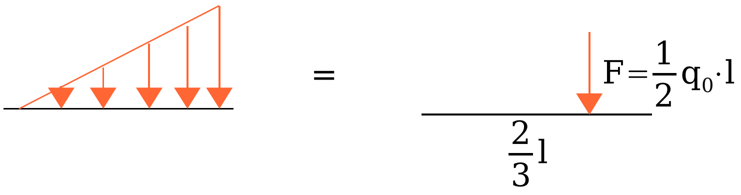
1.



$$F = \int_0^l q_0 \, dx = q_0 \cdot l$$

$$\bar{x} = \frac{1}{q_0 \cdot l} \int_0^l q_0 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} \frac{l^2}{l}$$

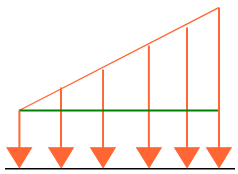
2.



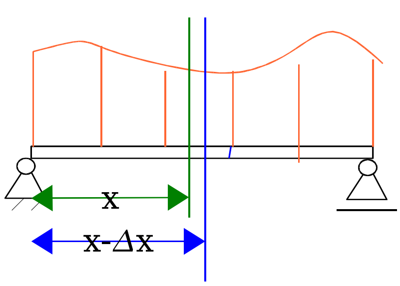
$$F = \int_0^l \frac{q_0 \cdot x}{l} dx = \left[\frac{q_0}{l} \frac{1}{2} x^2\right]_0^l = \frac{q_0 \cdot l}{2}$$

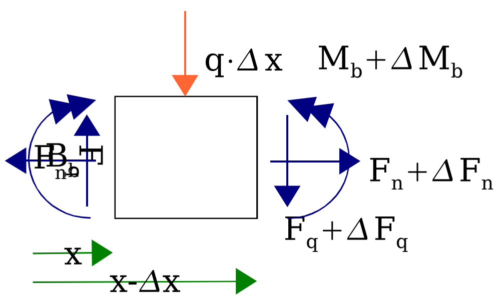
$$\bar{x} = \frac{2}{q_0 \cdot l} \int_0^l \frac{q_0 \cdot x^2}{l} dx \underset{\frac{2}{3}l}{=} \frac{2}{l^2}\left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^l$$

3.



<u>Differentielle Zusammenhänge</u>





<u>Kräfte-Gleichgewicht</u>

$\sum F_{iz}=0=q\cdot\Delta x+\Delta F_q=0$ ①

$\sum M_{bi[MP]}=+\Delta M_b-F_q\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot 2-\Delta F_q\cdot\frac{\Delta x}{2}$ ②

$q+\frac{\Delta F_q}{\Delta}x=0$ ③

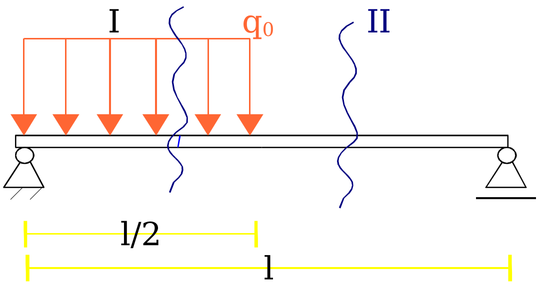
$\frac{\Delta M_b}{\Delta x}-F_q-\frac{\Delta F_q}{2}=0$ ④

Grenzwertbetrachtung $\Delta x\rightarrow 0, \Delta F_q\rightarrow 0$

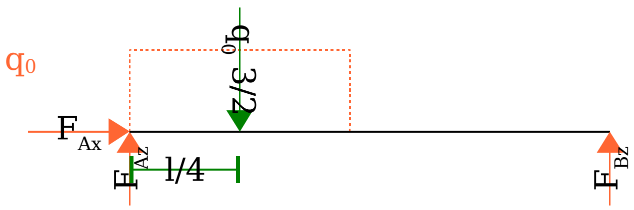
$\frac{dF_q}{dx}=-q$

$\frac{dM_b}{dx}=F_q$

<u>Beispiel:</u>



Gegeben: l, q_0
Gesucht: Querkraft-/Biegemomentenverlauf $M_{b\,max}$ (Ort, Größe)
① Auflagerkräfte



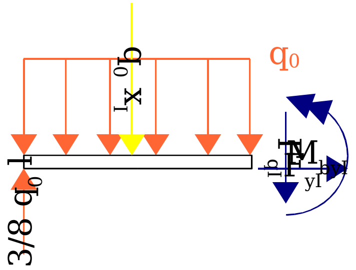
$F_{Ax}=0$

$F_{Az}=\frac{3}{8}q_0 l$

$F_{Bz}=\frac{1}{8}q_0 l$

② Schnittkräfte

Bereich I: $0\leq x<\frac{l}{2}$

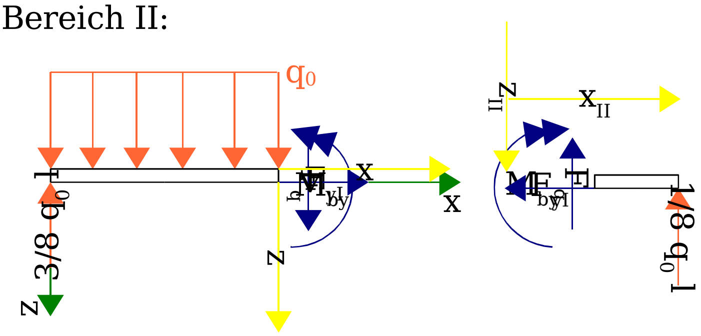


③ $\sum F_{ix}+F_n=0 \rightarrow F_n=0$

$$\sum F_{iz}+F_q=0=q_0\cdot x_I+F_{qI}-\frac{3}{8}q_0\cdot l \rightarrow F_{qI}=\frac{3}{8}q_0 l-q_0\cdot x_I$$

$$\sum M_{i[\ltimes]}+M_{by}=q_0\cdot x_I\frac{\cdot x_I}{2}-\frac{3}{8}q_0\cdot l\, x_I+M_{byI}=0 \rightarrow M_{byI}=\frac{3}{8}q_0\cdot l\cdot x_I-\frac{1}{2}q_0\, x_I^2$$

Bereich II:



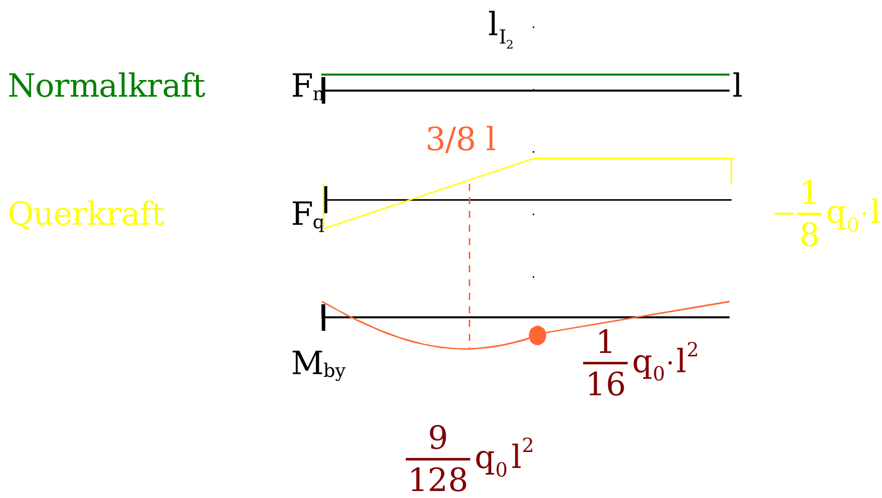
$$\sum F_{ix}+F_n=0 \rightarrow F_n=0$$

$$\sum F_{iz}+F_q=0=-F_q-\frac{1}{8}q_0\cdot l \rightarrow F_q=\frac{-1}{8}q_0\cdot l$$

$$\sum M_i+M_{by}=0=-B_{by}+\frac{1}{8}q_0\cdot l\cdot\left(\frac{l}{2}-x_{II}\right)$$

$$M_{by}=\frac{1}{8}q_0\cdot l\left(\frac{l}{2}-x_{II}\right)$$

④ Schnittgrößenverlauf



3. Ausgewählte Kapitel der Dynamik

3.1. Übersicht Themengebiete der Dynamik

Begriffe:

KINEMATIK – Lehre von den Bewegungen

KINETIK – Lehre von Kräften und Bewegungen

Schwingungen → Bewegungsvorgang, spezieller Teil der Kinetik → große Bedeutung in Ingenieurwissenschaften

Punktmasse – Massenpunkt (z.B. Schwerpunkt)

System von Punktmassen → Körper

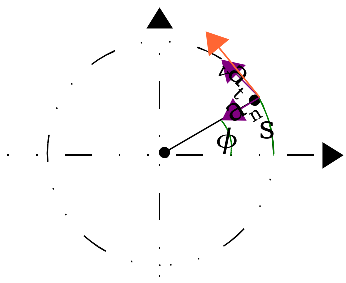
System von Körpern → mechanisches System

3.2. Grundgesetze der Dynamik

3.2.1. Kinematik

Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

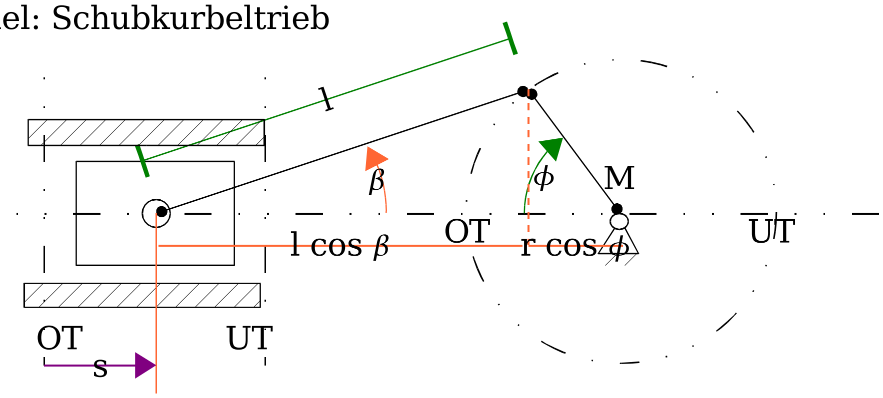
Drehbewegung:



s – Ortskoordinate
r – Radius der Bahn
ϕ - Drehwinkel

$$s(t)=r\cdot\phi(t)$$
$$v(t)=\dot{s}(t)=r\cdot\dot{\phi}(t)=r\cdot\omega(t)$$
$$a_t(t)=\ddot{s}(t)=r\cdot\ddot{\phi}(t)=r\cdot\dot{\omega}(t)=r\cdot\alpha(t)$$
$$a_n(t)=\frac{\upsilon^2(t)}{r}=\upsilon\cdot\omega=r\cdot\omega^2$$
$$\text{mit } \omega=\frac{\delta\phi}{\delta t}=\dot{\phi} \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } [\frac{1}{s}]$$
$$\alpha=\dot{\omega}=\frac{\delta^2\phi}{\delta t^2}=\ddot{\phi} \quad \text{Winkelbeschleunigung } [\frac{1}{s^2}]$$

Beispiel: Schubkurbeltrieb



P – Mitte Kolbenbolzen
k – Kurbelzapfen mit $\upsilon_k=r\cdot\omega$
OT/UT – Oberer, unterer Totpunkt
s – Ortskoordinate
ϕ - Kurbelwinkel
M – Drehpunkt – Kurbelwelle
l – Länge Pleuel

Ansatz: $s=(l+r)-(l\cdot\cos\beta+r\cdot\cos\phi)$

mit Sinussatz $\frac{l}{\sin\phi}=\frac{r}{\sin\beta}$ und $\lambda=\frac{r}{l}$

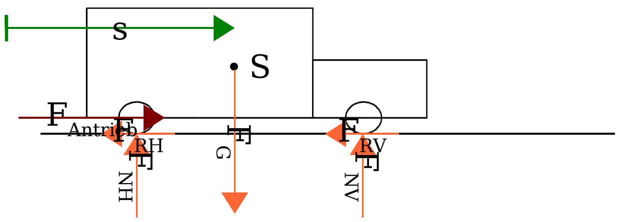
$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$\rightarrow s=r[1-\cos\phi+\frac{1}{\lambda}(1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\phi})]$$
$$v=\dots$$
$$a=\dots$$

3.2.2. Axiome der Kinetik

Newton'sches Grundgesetz (bei m=const.) $\vec{F}=m\cdot\vec{a}$

im Karth. KOS $\begin{Bmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \\ \sum F_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\cdot\ddot{x} \\ m\cdot\ddot{y} \\ m\cdot\ddot{z} \end{Bmatrix}$

Beispiel:



Fahrzeug m=1,2t soll auf ebener Fahrbahn in t_1=6s gleichförmig beschleunigen auf v_1=54km/h

a) → Beschleunigung?

b) → Antriebskraft?

a) $a_0=\frac{v_1}{t_1}=2{,}5\frac{m}{s^2}$

b) $\sum F_{ix}=m\cdot a$

$$F_{Antrieb}-\underbrace{(F_{RH}+F_{RV})}_{\sim 0}=m\cdot a_0$$

$$F_{Antrieb}=1200\,kg\cdot 2{,}5\frac{m}{s^2}\approx 3\,kN$$

3.3. Zwei-Massen-Schwinger

4. Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre

4.1. Aufgaben der FL

Begriff FL → durch Kräfte verursachte Wirkung im inneren eines Bauteils ermitteln, Betrachtung an einem verformbaren festen Körper

Schnittreaktion → Belastungsintensität

Spannung → führt zur Verformung (Deformation)

Bei Festigkeitsberechnung eines Bauteils besteht folgender Zusammenhang zwischen den vier wesentlichen Größen:

- Bauteilgeometrie
- Bauteilwerkstoff

- Belastung und
- geforderten Sicherheitsbeiwert gegen Versagen

Belastung, Bauteilgeometrie → Wirksame innere Beanspruchung ⇒ Beanspruchungs-kriterien ⇐ Zulässige Werkstoff-beanspruchung ← Werkstoff, Sicherheitsbeiwert

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad \sigma_{vorhanden} \leq \sigma_{zulässig} \qquad \sigma_{zulässig} = \frac{K}{S}$$

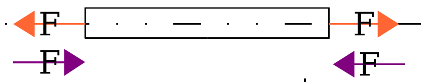
<u>Aufgaben / Ziele der FL</u>

- Berechnung der Beanspruchung und Verformung
  Vergleich mit zulässigen Werten
- Berechnung der Tragfähigkeit (Abmessungen und Material sind gegeben)
- Ermittlung von erforderlichen Abmessungen (Dimensionierung)

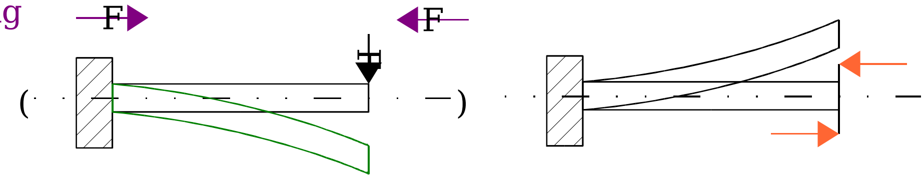
4.2. Grundsätzliche Beanspruchungsarten

4.2.1. Richtung der Beanspruchung

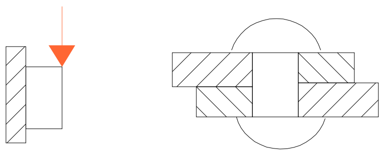
- Zugbeanspruchung
  Druckbeanspruchung



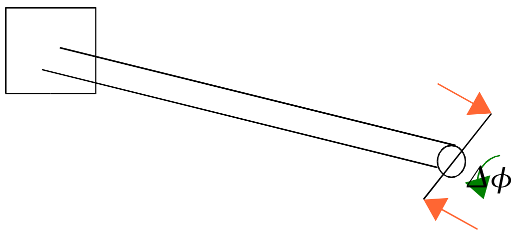
- Biegung



- Schub- / Scherbeanspruchung



- Torsion



- kombinierte Beanspruchungen

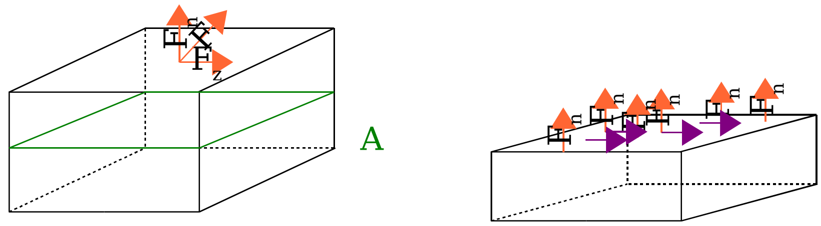
4.2.2. Zeitlicher Verlauf der Beanspruchung

- Ruhende, statische Beanspruchung

- Dynamische Beanspruchung
  - schwingend
    - regelmäßig
    - unregelmäßig
  - schlagartig (Impuls)

4.3. Ebener Spannungszustand

Normal- und Schubspannungen

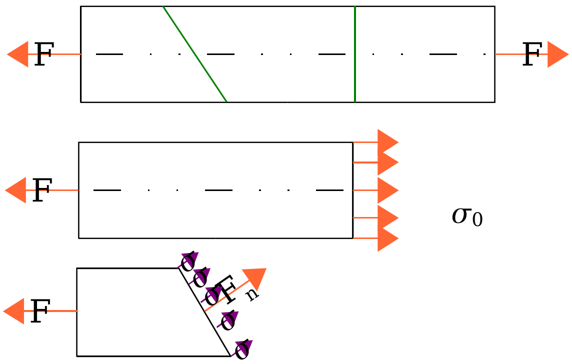


σ Normalspannung

τ Tangential-/ Schubspannung

$$\tau = \frac{F_t}{A}$$

Beispiel: Zugstab



$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot h}$$